PHÒNG GD & ĐT TP HẢI DƯƠNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
NĂM HỌC 2013 - 2014
MÔN **TOÁN** - VÒNG 1
Thời gian làm bài: **150** phút
(Đề thi gồm 05 câu, 01 trang)

Câu 1 (2,0 điểm): Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1\right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}\right)$$

a. Rút gọn biểu thức A. b. Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của A.

Câu 2 (2,0 điểm):

a) Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2-1} - \sqrt{10x - x^2 - 9} = \sqrt{2x^2 - 14x + 12}$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ y + z + yz = 47 \\ z + x + zx = 35 \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm):

a) Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác và p là nửa chu vi thì :

$$\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \le \sqrt{3p}$$

b) Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình:

$(m-4)x + (m-3)y = 1$ (m là tham số).

Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Câu 4 (3,0 điểm):

1.Cho đường tròn tâm O bán kính R, điểm I nằm trong đường tròn khác điểm O. Qua I vẽ hai dây AB và CD vuông góc với nhau.

a) Chứng minh rằng: Tổng $IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$ không phụ thuộc vị trí của điểm I trong đường tròn tâm O.

b) Trong trường hợp điểm I cố định khác điểm O, hãy xác định vị trí của hai dây AB, CD để diện tích tứ giác ACBD đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

2. Cho hình vuông ABCD, các điểm M và N thay đổi trên các cạnh BC và CD sao cho góc $\widehat{MAN} = 45^0$. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Câu 5 (1,0 điểm):

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $y^2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

------------ Hết------------

Giám thị 1: .... Giám thị 2: ....

SBD: .... Họ và tên thí sinh: ....

(Chú ý: Học sinh không được sử dụng máy tính)

PHÒNG GD & ĐT TP HẢI DƯƠNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 NĂM HỌC 2013 - 2014

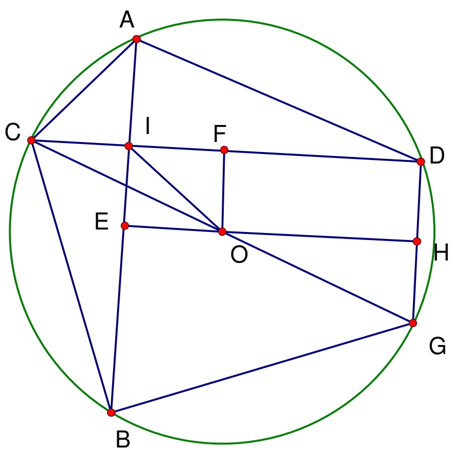
MÔN TOÁN - VÒNG 1

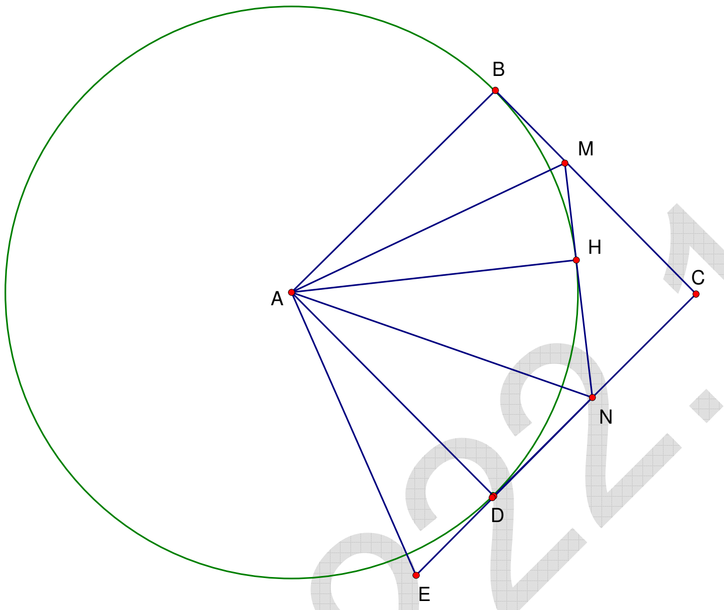
Thời gian làm bài:150 phút

(Hướng dẫn chấm gồm 05 câu, 01 trang)

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	a	. Đk : x > 0; y > 0; x.y ≠ 1. Rút gọn được : $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}+\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}}+1\right):\left(1-\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}\right)$ $=\frac{2\sqrt{x}+2}{1-xy}:\frac{-2x\sqrt{y}-2\sqrt{xy}}{xy-1}=\frac{2(\sqrt{x}+1)}{xy-1}.\frac{-(1-xy)}{-2\sqrt{xy}.(\sqrt{x}+1)}$ => $A=\frac{1}{\sqrt{x.y}}$, với x > 0, y > 0, và x.y ≠ 1	0.25 0.5 0,25
	b	Ta có: $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=6\Rightarrow A=\frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{1}{\sqrt{y}}\le 9$ (áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số dương) $\Rightarrow$ GTLN của $A=9\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{y}}=3\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{9}$	0.5 đ 0.5 đ
2	a	$\sqrt{x^2-1}-\sqrt{10x-x^2-9}=\sqrt{2x^2-14x+12}$ $\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)(x+1)}-\sqrt{(x-1)(9-x)}=\sqrt{(x-1)(2x-12)}$ ĐKXĐ: $\begin{cases}(x-1)(x+1)\ge 0\\(x-1)(9-x)\ge 0\\(x-1)(2x-12)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x=1;6\le x\le 9$	0,25
		Khi đó $\sqrt{(x-1)(x+1)}-\sqrt{(x-1)(9-x)}=\sqrt{(x-1)(2x-12)}$ $\Leftrightarrow\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}-\sqrt{2x-12})=0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x-1}=0 & (1)\\\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}-\sqrt{2x-12}=0 & (2)\end{array}\right.$	0,25
		Giải (1) được x = 1 (thoả mãn ĐKXĐ) Giải (2): $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}-\sqrt{2x-12}=0\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=\sqrt{9-x}+\sqrt{2x-12}$ $\Leftrightarrow x+1=9-x+2x-12+2\sqrt{9-x}.\sqrt{2x-12}$ $\Leftrightarrow 2=\sqrt{9-x}.\sqrt{2x-12}\Leftrightarrow x^2-15x+56=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7\\x=8\end{array}\right.$	0,25
		x =7; x = 8 thoả mãn ĐKXĐ. Vậy $x\in\{1;7;8\}$	0,25

	b	Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x+y+xy+1=12 \\ y+z+yz+1=48 \\ z+x+zx+1=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1)=12 \\ (y+1)(z+1)=48 \\ (z+1)(x+1)=36 \end{cases}$ $\Rightarrow \left\{(x+1)(y+1)(z+1)\right\}^2 = 144^2$ a) Xét $(x+1)(y+1)(z+1)=144 \Rightarrow \begin{cases} x+1=3 \\ y+1=4 \\ z+1=12 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(2;3;11)$ b) $(x+1)(y+1)(z+1)$=-144 $\Rightarrow \begin{cases} x+1=-3 \\ y+1=-4 \\ z+1=-12 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(-4;-5;-13)$ Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x,y,z)=(-4;-5;-13)$; $(2;3;11)$	0,25 0,25 0,25 0,25
3	a	Ta chứng minh với mọi a, b, c thì: $(a+b+c)^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$ (*) Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \le 3a^2+3b^2+3c^2$ $\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$ (luôn đúng) Áp dụng (*) ta có: $\left(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\right)^2 \le 3(3p-a-b-c)=3p$ Suy ra $\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c} \le \sqrt{3p}$. Dấu bằng xáy ra khi tam giác đã cho là tam giác đều	0.25 0.25 0,25 0,25
	b	Với mọi m, đường thẳng (d) không đi qua gốc toạ độ O(0; 0). • m = 4, ta có đường thẳng y = 1, do đó khoảng cách từ O đến (d) là 1 (1). • m = 3, ta có đường thẳng x = -1, do đó khoảng cách từ O đến (d) là 1 (2). • m ≠ 4, m ≠ 3 thì (d) cắt trục Oy, Ox lần lượt tại: $A\left(0;\frac{1}{m-3}\right)$ và $B\left(\frac{1}{m-4};0\right)$. Hạ OH vuông góc với AB, trong tam giác vuông AOB, ta có: $OA=\frac{1}{\lvert m-3\rvert}, OB=\frac{1}{\lvert m-4\rvert}$ $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=(m-3)^2+(m-4)^2=2m^2-14m+25$ $=2\left(m-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{2} \ge \frac{1}{2}$	0.25 0.25 0,25

		Suy ra $OH^2 \le 2 \Rightarrow OH \le \sqrt{2}$ (3). Từ (1), (2), (3) ta có GTLN của OH là $\sqrt{2}$, đạt được khi và chỉ khi m $= \frac{7}{2}$. Kết luận: m $= \frac{7}{2}$.	0,25
4	1	 Hình vẽ đúng	0,25
	a	Áp dụng định lí Py ta go vào các tam giác vuông BIC và AID có: $IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = AD^2 + BC^2$ Vẽ đường kính CG của (O). Ta có góc GDC = 90^0. => DG || AB, => Tứ giác BGDA là hình thang. Gọi OE cắt DG tại H. Chứng minh EH là trung trực của AB và DG từ đó suy ra được hình thang ABGD là hình thang cân. => AD = BG. Lại có B thuộc đường tròn tâm O đường kính CG. => $\widehat{CBG} = 90^0$. => $BC^2 + BG^2 = BC^2 + AD^2 = CG^2 = 4R^2$ => $IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = 4R^2$ có giá trị không phụ thuộc vào vị trí điểm I.	0,25 0,25 0,25
	b	* Hạ OE $\perp AB; OF \perp CD$ Ta có E, F thứ tự là trung điểm của AB và CD. Xét tam giác vuông ODF và tam giác vuông OEB có : $DF^2 + OF^2 = OD^2 = R^2$. $OE^2 + BE^2 = OB^2 = R^2$. => $DF^2 + BE^2 = 2R^2 - (OE^2 + OF^2)$ * Chứng mính được tứ giác IEOF là hình chữ nhật => $OE^2 + OF^2 = OI^2$. => $CD^2 + AB^2 = 8R^2 - 4\,OI^2$. Gọi diện tích tứ giác ACBD là S. Ta có S = $\frac{1}{2}.AB.CD$ (Vì AB $\perp$ CD)	0,25

		Có $AB^2 + CD^2 = 8R^2 - 4\,OI^2$. Áp dụng bất đẳng thức: $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ta có : $AB^2 + CD^2 \geq 2.\,AB.CD$. $\Rightarrow S \leq R^2 - OI^2$ không đổi. Dấu bằng xáy ra khi và chỉ khi OE = OF $\Leftrightarrow$ tứ giác OEIF là hình vuông. Khi đó CD và AB tạo với tia IO cố định một góc 45^0. Vậy diện tích lơn nhất của tứ giác ABCD bằng $R^2 - OI^2$ khi hai dây AB và CD tạo với tia IO cố định một góc bằng 45^0.	0,25 0,25 0,25
	2	 Gọi độ dài cạnh hình vuông ABCD là a. Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho DE = BM. $\Rightarrow \Delta\, ADE = \Delta\, ADM$ (c.g.c) $\Rightarrow AE = AM$ và $\widehat{BAM} = \widehat{EAD}$. $\Rightarrow \widehat{EAN} = 45^0$ $\Rightarrow \Delta\, AMN = \Delta\, AEN$ (c.g.c) Kẻ $AH \perp MN \Rightarrow AH = AD = a$ (không đổi). Do điểm A cố định nên ta suy ra MN luôn tiếp xúc với đường tròn (A, a) cố định.	 0,25 0,25 0,25 0,25
5		Với x = 0 thì $y = \pm 1$. Xét x khác 0, ta có: $4y^2 = (2x^2 + x)^2 + 3x^2 + 4x + 4 > (2x^2 + x)^2$ Mặt khác: $4y^2 = (2x^2 + x + 2)^2 - 5x^2 < (2x^2 + x + 2)^2$ ⇨ $4y^2 = (2x^2 + x + 1)^2$ ⇨ $4(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = (2x^2 + x + 1)^2$ ⇨ $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$ Vậy phương trình có 5 nghiệm nguyên (x;y) là : (0;1) ; (0;-1) ; (-1;1); (-1;-1); (3;121)	0,25 0,25 0,25 0,25

** Chú ý: Học sinh có thể làm cách khác, nếu đúng vẫn cho đủ biểu điểm.* .

------------- Hết-------------