SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI DƯƠNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
CHUYÊN NGUYỄN TRÃI NĂM HỌC 2015 - 2016
Môn thi: TOÁN (Chuyên)
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề
(Đề thi gồm: 01 trang)

Câu I (2,0 điểm)

1) Cho $a-b=\sqrt{29+12\sqrt{5}}-2\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A=a^2(a+1)-b^2(b-1)-11ab+2015$$

2) Cho x, y là hai số dương thỏa mãn $xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1$.

Chứng minh rằng $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=0$.

Câu II (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $2x+3+\sqrt{4x^2+9x+2}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-y^2+xy-5x+y+2=\sqrt{y-2x+1}-\sqrt{3-3x} \\ x^2-y-1=\sqrt{4x+y+5}-\sqrt{x+2y-2} \end{cases}$

Câu III (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4+x^2-y^2-y+20=0$.

2) Tìm các số nguyên *k* để $k^4-8k^3+23k^2-26k+10$ là số chính phương.

Câu IV (3,0 điểm) Cho đường tròn (O; R) và dây BC cố định không đi qua tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A khác B). Từ *A* kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O) (M và N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC.

1) Chứng minh A, O, M, N, I cùng thuộc một đường tròn và IA là tia phân giác của góc $\widehat{MIN}$.

2) Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh $\dfrac{2}{AK}=\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}$.

3) Đường thẳng qua M và vuông góc với đường thẳng ON cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Xác định vị trí của điểm A trên tia đối của tia BC để AMPN là hình bình hành.

Câu V (1,0 điểm) Cho *a*,*b* là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3+4ab\le 12$.

Chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+2015ab\le 2016$.

---------------------------Hết---------------------------

Họ và tên thí sinh..Số báo danh..

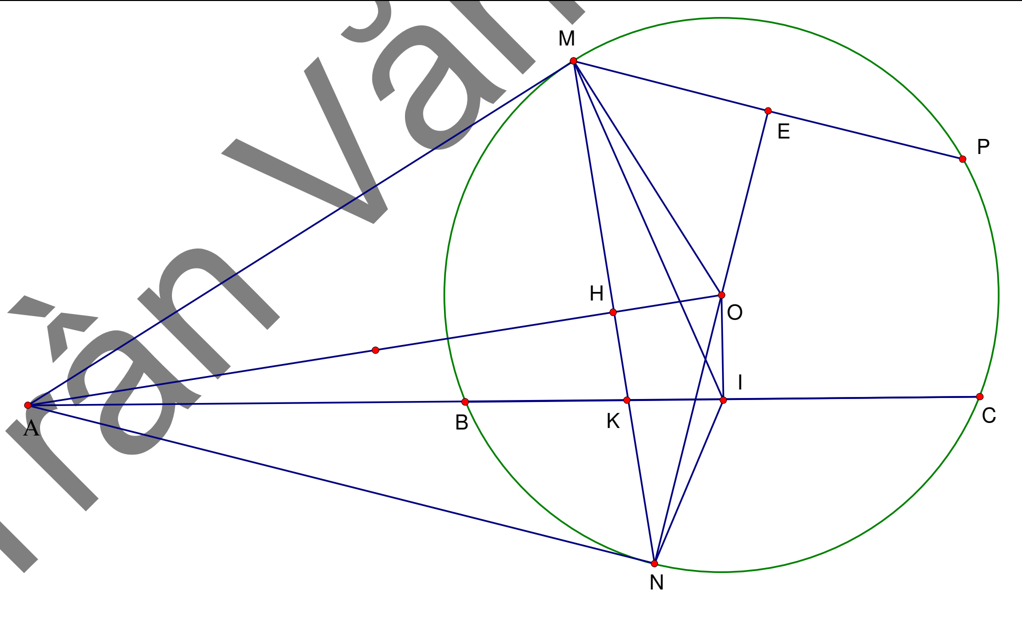
Chữ kí của giám thị 1: ....Chữ kí của giám thị 2: ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI DƯƠNG

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN
ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2015 - 2016
(Hướng dẫn chấm gồm: 05 trang)

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
I	1	**Cho** $a-b=\sqrt{29+12\sqrt{5}}-2\sqrt{5}$. **Tính giá trị của biểu thức:** $A=a^2(a+1)-b^2(b-1)-11ab+2015$	**1,00**
		$a-b=\sqrt{29+12\sqrt{5}}-2\sqrt{5}=\sqrt{\left(3+2\sqrt{5}\right)^2}-2\sqrt{5}=3+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}=3$	0,25
		$A=a^3-b^3+a^2+b^2-11ab+2015$	0,25
		$=(a-b)(a^2+b^2+ab)+a^2+b^2-11ab+2015$ $=3(a^2+b^2+ab)+a^2+b^2-11ab+2015$	0,25
		$=4(a^2-2ab+b^2)+2015=4(a-b)^2+2015=2051$	0,25
	2	**Cho** x,y **là hai số dương thỏa mãn** $xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1$. **Chứng minh rằng** $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=0$	**1,00**
		$xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1\Leftrightarrow\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1-xy$ $\Rightarrow(1+x^2)(1+y^2)=(1-xy)^2$	0,25
		$\Leftrightarrow 1+x^2+y^2+x^2y^2=1-2xy+x^2y^2$	0,25
		$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy=0\Leftrightarrow(x+y)^2=0\Leftrightarrow y=-x$	0,25
		$\Rightarrow x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=x\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{1+x^2}=0$	0,25
II	1	**Giải phương trình** $2x+3+\sqrt{4x^2+9x+2}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}$.	**1,00**
		Pt $\Leftrightarrow 2x+3+\sqrt{(x+2)(4x+1)}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}$. ĐK: $x\ge-\frac{1}{4}$	0,25
		Đặt $t=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}, t\ge\sqrt{7}$ (hoặc $t\ge0$) $\Rightarrow t^2=8x+4\sqrt{(x+2)(4x+1)}+9\Leftrightarrow 2x+\sqrt{(x+2)(4x+1)}=\frac{t^2-9}{4}$ PTTT $t^2-4t+3=0\Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=3$	0,25
		- TH1. $t=1$ giải ra vô nghiệm hoặc kết hợp với ĐK $t\ge\sqrt{7}$ bị loại	0,25
		- TH 2. $t=3\Rightarrow 2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}=3$. Giải pt tìm được $x=-\frac{2}{9}$ (TM) Vậy pt có nghiệm duy nhất $x=-\frac{2}{9}$	0,25

II	2	**Giải hệ pt** $\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy - 5x + y + 2 = \sqrt{y - 2x + 1} - \sqrt{3 - 3x} \\ x^2 - y - 1 = \sqrt{4x + y + 5} - \sqrt{x + 2y - 2} \end{cases}$	**1,00**
		ĐK: $y - 2x + 1 \ge 0, 4x + y + 5 \ge 0, x + 2y - 2 \ge 0, x \le 1$ - TH 1. $\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ 3 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -1 = \sqrt{10} - 1 \end{cases}$ (Không TM hệ) - TH 2. $x \ne 1, y \ne 1$. Đưa pt thứ nhất về dạng tích ta được $(x + y - 2)(2x - y - 1) = \dfrac{x + y - 2}{\sqrt{y - 2x + 1} + \sqrt{3 - 3x}}$	0,25
		$(x + y - 2)\left[\dfrac{1}{\sqrt{y - 2x + 1} + \sqrt{3 - 3x}} + y - 2x + 1\right] = 0$. Do $y - 2x + 1 \ge 0$ nên $\dfrac{1}{\sqrt{y - 2x + 1} + \sqrt{3 - 3x}} + y - 2x + 1 > 0 \Rightarrow x + y - 2 = 0$	0,25
		Thay $y = 2 - x$ vào pt thứ hai ta được $x^2 + x - 3 = \sqrt{3x + 7} - \sqrt{2 - x}$ $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = \sqrt{3x + 7} - 1 + 2 - \sqrt{2 - x}$ $\Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = \dfrac{3x + 6}{\sqrt{3x + 7} + 1} + \dfrac{2 + x}{2 + \sqrt{2 - x}}$	0,25
		$\Leftrightarrow (x + 2)\left[\dfrac{3}{\sqrt{3x + 7} + 1} + \dfrac{1}{2 + \sqrt{2 - x}} + 1 - x\right] = 0$ Do $x \le 1$ nên $\dfrac{3}{\sqrt{3x + 7} + 1} + \dfrac{1}{2 + \sqrt{2 - x}} + 1 - x > 0$ Vậy $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 4$ (TMĐK)	0,25
III	1	**Tìm các số nguyên** x, y **thỏa mãn** $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$ (1)	**1,00**
		Ta có (1) $\Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = y^2 + y$ Ta thấy $x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 20 \le x^4 + x^2 + 20 + 8x^2$ $\Leftrightarrow x^2\left(x^2 + 1\right) < y\left(y + 1\right) \le \left(x^2 + 4\right)\left(x^2 + 5\right)$	0,25
		Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên ta xét các trường hợp sau + TH1. $y\left(y + 1\right) = \left(x^2 + 1\right)\left(x^2 + 2\right) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 3x^2 + 2$ $\Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$ Với $x^2 = 9$, ta có $y^2 + y = 9^2 + 9 + 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 110 = 0$ $\Leftrightarrow y = 10$; $y = -11$ (t.m)	0,25
		+ TH2. $y\left(y + 1\right) = \left(x^2 + 2\right)\left(x^2 + 3\right) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 5x^2 + 6$ $\Leftrightarrow 4x^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{7}{2}$ (loại) + TH3. $y\left(y + 1\right) = \left(x^2 + 3\right)\left(x^2 + 4\right) \Leftrightarrow 6x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{4}{3}$ (loại)	0,25
		+ TH4. $y\left(y + 1\right) = \left(x^2 + 4\right)\left(x^2 + 5\right)$ $\Leftrightarrow 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$	0,25

		Với $x^2=0$, ta có $y^2+y=20 \Leftrightarrow y^2+y-20=0 \Leftrightarrow y=-5;\ y=4$ Vậy PT đã cho có nghiệm nguyên $(x\,;\,y)$ là : $(3\,;10),(3\,;-11),(-3\,;10),(-3\,;-11),(0\,;-5),(0\,;4)$.	
III	2	**Tìm các số nguyên k để $k^4-8k^3+23k^2-26k+10$ là số chính phương**	**1,00**
		Đặt $M=k^4-8k^3+23k^2-26k+10$ Ta có $M=\left(k^4-2k^2+1\right)-8k\left(k^2-2k+1\right)+9k^2-18k+9$ $=\left(k^2-1\right)^2-8k\left(k-1\right)^2+9\left(k-1\right)^2=\left(k-1\right)^2.\left[\left(k-3\right)^2+1\right]$	0,25
		M là số chính phương khi và chỉ khi $(k-1)^2=0$ hoặc $(k-3)^2+1$ là số chính phương. TH 1. $(k-1)^2=0 \Leftrightarrow k=1$.	0,25
		TH 2. $(k-3)^2+1$ là số chính phương, đặt $(k-3)^2+1=m^2\ (m\in\mathbb{Z})$ $\Leftrightarrow m^2-(k-3)^2=1 \Leftrightarrow (m-k+3)(m+k-3)=1$	0,25
		Vì $m,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow m-k+3\in\mathbb{Z}, m+k-3\in\mathbb{Z}$ nên $\begin{cases} m-k+3=1\\ m+k-3=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m-k+3=-1\\ m+k-3=-1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1,k=3\\ m=-1,k=3\end{array}\right. \Rightarrow k=3$ Vậy $k=1$ hoặc $k=3$ thì $k^4-8k^3+23k^2-26k+10$ là số chính phương	0,25
IV	1	**Chứng minh IA là tia phân giác của $\widehat{MIN}$.**	**1,00**
			
		Theo giả thiết $\widehat{AMO}=\widehat{ANO}=\widehat{AIO}=90^0 \Rightarrow$ 5 điểm A, O, M, N, I thuộc đường tròn đường kính AO	0,25
		$\Rightarrow \widehat{AIN}=\widehat{AMN}, \widehat{AIM}=\widehat{ANM}$ (Góc nội tiếp cùng chắn một cung)	0,25
		$AM=AN \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{AMN}=\widehat{ANM}$	0,25
		$\Rightarrow \widehat{AIN}=\widehat{AIM} \Rightarrow$ đpcm	0,25

IV	2	**Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh $\frac{2}{AK}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$.**	**1,00**
		$\frac{2}{AK}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}\Leftrightarrow 2AB.AC=AK(AB+AC)\Leftrightarrow AB.AC=AK.AI$ (Do $AB+AC=2AI$)	0,25
		$\Delta ABN \backsim \Delta ANC \Rightarrow AB.AC=AN^2$	0,25
		$\Delta AHK \backsim \Delta AIO \Rightarrow AK.AI=AH.AO$	0,25
		Tam giác ΔAMO vuông tại M có đường cao MH $\Rightarrow AH.AO=AM^2$ $\Rightarrow AK.AI=AM^2$. Do $AN=AM\Rightarrow AB.AC=AK.AI$	0,25
IV	3	**Đường thẳng qua M, vuông góc với ON cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Xác định vị trí của điểm A để AMPN là hình bình hành.**	**1,00**
		Ta có $AN\perp NO,\ MP\perp NO,\ M\notin AN\Rightarrow AN//MP$ Do đó AMPN là hình bình hành $\Leftrightarrow AN=MP=2x$ $\Delta ANO \backsim \Delta NEM\Rightarrow \frac{AN}{NE}=\frac{NO}{EM}\Rightarrow NE=\frac{2x^2}{R}$	0,25
		TH 1. $NE=NO-OE\Rightarrow \frac{2x^2}{R}=R-\sqrt{R^2-x^2}\Leftrightarrow 2x^2=R^2-R\sqrt{R^2-x^2}$ Đặt $\sqrt{R^2-x^2}=t, t\ge 0\Rightarrow x^2=R^2-t^2$. PTTT $2(R^2-t^2)=R^2-Rt\Leftrightarrow 2t^2-Rt-R^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2t=-R\\ t=R\end{array}\right.$ Do $t\ge 0\Rightarrow t=R\Leftrightarrow\sqrt{R^2-x^2}=R\Leftrightarrow x=0\Rightarrow A\equiv B$ (Loại)	0,25
		TH 2. $NE=NO+OE\Rightarrow \frac{2x^2}{R}=R+\sqrt{R^2-x^2}\Leftrightarrow 2x^2=R^2+R\sqrt{R^2-x^2}$ Đặt $\sqrt{R^2-x^2}=t, t\ge 0\Rightarrow x^2=R^2-t^2$. PTTT $2(R^2-t^2)=R^2+Rt\Leftrightarrow 2t^2+Rt-R^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2t=R\\ t=-R\end{array}\right.$	0,25
		Do $t\ge 0\Rightarrow 2t=R\Leftrightarrow 2\sqrt{R^2-x^2}=R\Leftrightarrow x=\frac{R\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AO=2R$ Vậy A thuộc BC, cách O một đoạn bằng 2R thì AMPN là hbh	0,25
V		**Chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+2015ab\le 2016$.**	**1,00**
		Ta có $12\ge (a+b)^3+4ab\ge\left(2\sqrt{ab}\right)^3+4ab$. Đặt $t=\sqrt{ab}, t>0$ thì $12\ge 8t^3+4t^2\Leftrightarrow 2t^3+t^2-3\le 0\Leftrightarrow (t-1)(2t^2+3t+3)\le 0$ Do $2t^2+3t+3>0,\forall t$ nên $t-1\le 0\Leftrightarrow t\le 1$. Vậy $0<ab\le 1$	0,25

		Chứng minh được $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\le\frac{2}{1+\sqrt{ab}},\forall a,b>0$ thỏa mãn $ab\le 1$ Thật vậy, BĐT $\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+\sqrt{ab}}+\frac{1}{1+b}-\frac{1}{1+\sqrt{ab}}\le 0$ $\frac{\sqrt{ab}-a}{(1+a)(1+\sqrt{ab})}+\frac{\sqrt{ab}-b}{(1+b)(1+\sqrt{ab})}\le 0\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{1+a}-\frac{\sqrt{b}}{1+b}\right)\le 0$ $\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2(\sqrt{ab}-1)}{(1+\sqrt{ab})(1+a)(1+b)}\le 0$. Do $0<ab\le 1$ nên BĐT này đúng	0,25
		Tiếp theo ta sẽ CM $\frac{2}{1+\sqrt{ab}}+2015ab\le 2016,\forall a,b>0$ thỏa mãn $ab\le 1$ Đặt $t=\sqrt{ab},0<t\le 1$ ta được $\frac{2}{1+t}+2015t^2\le 2016$ $2015t^3+2015t^2-2016t-2014\le 0$	0,25
		$\Leftrightarrow(t-1)(2015t^2+4030t+2014)\le 0$. BĐT này đúng $\forall t:0<t\le 1$ Vậy $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+2015ab\le 2016$. Đẳng thức xảy ra $a=b=1$.	0,25