

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I (2,0 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

1) $2x + 1 = 0$.

2)
$$\begin{cases} x = 3 - 2y \\ y = -1 + 2x \end{cases}$$

3) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$.

Câu II (2,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $A = (\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 3) - (\sqrt{a} + 1)^2 + \sqrt{9a}$ với $a \geq 0$.

2) Khoảng cách giữa hai tỉnh A và B là 60 km. Hai người đi xe đạp cùng khởi hành một lúc đi từ A đến B với vận tốc bằng nhau. Sau khi đi được 1 giờ thì xe của người thứ nhất bị hỏng nên phải dừng lại sửa xe 20 phút, còn người thứ hai tiếp tục đi với vận tốc ban đầu. Sau khi sửa xe xong, người thứ nhất đi với vận tốc nhanh hơn trước 4 km/h nên đã đến B cùng lúc với người thứ hai. Tính vận tốc hai người đi lúc đầu.

Câu III (2,0 điểm)

- 1) Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó.
- 2) Cho hai hàm số $y = (3m+2)x + 5$ với $m \neq -1$ và $y = -x - 1$ có đồ thị cắt nhau tại điểm $A(x; y)$. Tìm các giá trị của m để biểu thức $P = y^2 + 2x - 3$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu IV (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định và đường kính CD thay đổi không trùng với AB. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt các đường thẳng BC và BD lần lượt tại E và F. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE và AF.

- 1) Chứng minh ACBD là hình chữ nhật.
- 2) Gọi H là trực tâm của tam giác BPQ. Chứng minh H là trung điểm của OA.
- 3) Xác định vị trí của đường kính CD để tam giác BPQ có diện tích nhỏ nhất.

Câu V (1,0 điểm) Cho 2015 số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2015}$ thỏa mãn điều kiện:

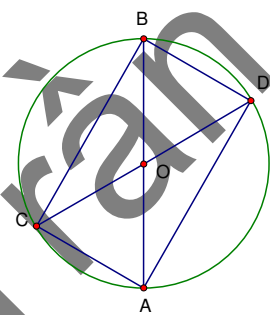
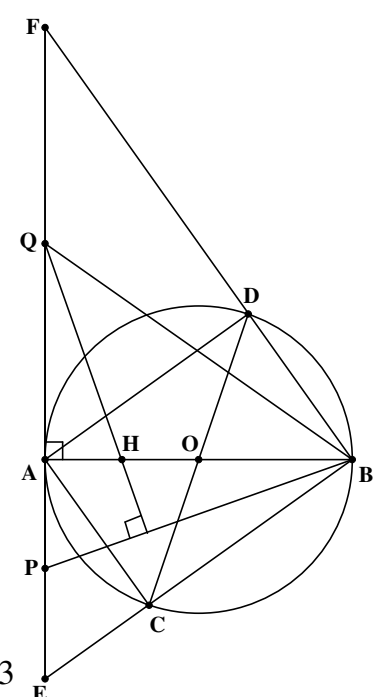
$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2015}}} \geq 89$$

Chứng minh rằng trong 2015 số nguyên dương đó, luôn tồn tại ít nhất 2 số bằng nhau.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....
Chữ kí của giám thị 1:Chữ kí của giám thị 2:

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
I	1	Giải phương trình $2x + 1 = 0$	0,50
		Pt $\Leftrightarrow 2x = -1$	0,25
		$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$	0,25
	2	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x = 3 - 2y \\ y = -1 + 2x \end{cases}$	0,50
		Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$	0,25
		Tìm được $x = y = 1$	0,25
	3	Giải phương trình $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$	1,00
		- Đặt $t = x^2, t \geq 0$ ta được $t^2 + 8t - 9 = 0$	0,25
		- Giải phương trình tìm được $\begin{cases} t = 1 \\ t = -9 \end{cases}$	0,25
		$t = -9 < 0$ (Loại)	0,25
$t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$		0,25	
II	1	Rút gọn biểu thức $A = (\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 3) - (\sqrt{a} + 1)^2 + \sqrt{9a}$ với $a \geq 0$.	1,00
		$(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 3) = a - \sqrt{a} - 6$	0,25
		$(\sqrt{a} + 1)^2 = a + 2\sqrt{a} + 1$	0,25
		$A = a - \sqrt{a} - 6 - (a + 2\sqrt{a} + 1) + 3\sqrt{a}$	0,25
		$A = -7$	0,25
	2	Tính vận tốc hai người đi lúc đầu	1,00
		- Gọi vận tốc hai người đi lúc đầu là x km/h ($x > 0$)	0,25
		- Thời gian đi từ A đến B của người thứ hai là $\frac{60}{x}$ (h)	
		Quãng đường người thứ nhất đi được trong 1 giờ đầu là x (km) \Rightarrow Quãng đường còn lại là $60 - x$ (km)	0,25
		\Rightarrow Thời gian người thứ nhất đi quãng đường còn lại là $\frac{60 - x}{x + 4}$ (h)	
$20' = \frac{1}{3}$ (h). Theo bài ra ta có: $\frac{60}{x} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{60 - x}{x + 4}$	0,25		

		$\Leftrightarrow 60.3.(x+4) = 4.x.(x+4) + 3.x.(60-x)$ $\Leftrightarrow x^2 + 16x - 720 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = -36 \end{cases}$ <p>Do $x > 0$ nên $x = 20$. Vậy vận tốc hai người đi lúc đầu là 20 km/h</p>	0,25
III	1	Tìm m để $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép	1,00
		$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 3) = 2m + 4$	0,25
		Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 2m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -2$	0,25
		Nghiệm kép là $x_1 = x_2 = m + 1$	0,25
		Vậy $m = -2$ thì phương trình có nghiệm kép là $x_1 = x_2 = -1$	0,25
	2	Cho hai hàm số $y = (3m+2)x + 5$ và $y = -x - 1$ có đồ thị cắt nhau tại điểm $A(x; y)$. Tìm m để biểu thức $P = y^2 + 2x - 3$ đạt giá trị nhỏ nhất.	1,00
		Với $m \neq -1$ hai đồ thị cắt nhau tại điểm $A\left(\frac{-2}{m+1}; \frac{2}{m+1} - 1\right)$	0,25
		$P = y^2 + 2x - 3 = \left(\frac{2}{m+1} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{-2}{m+1}\right) - 3$	0,25
		Đặt $t = \frac{2}{m+1}$ ta được $P = t^2 - 4t - 2 = (t - 2)^2 - 6 \geq -6, \forall t$	0,25
		$P = -6 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow \frac{2}{m+1} = 2 \Leftrightarrow m = 0$	0,25
		Vậy $m = 0$ thì biểu thức $P = y^2 + 2x - 3$ đạt giá trị nhỏ nhất	
IV	1	Chứng minh ACBD là hình chữ nhật	1,00
		<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>Hình vẽ ý 1</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Hình vẽ ý 2 và 3</p> </div> </div>	

	Vẽ đúng hình ý 1	0,25
	$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)	0,25
	$\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)	0,25
	Suy ra ACBD là hình chữ nhật	0,25
IV	Chứng minh H là trung điểm của OA	1,00
	- Tam giác BEF vuông tại B có đường cao BA nên $AB^2 = AE \cdot AF$ $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow \frac{AE}{2OA} = \frac{AB}{2AQ} \Rightarrow \frac{AE}{OA} = \frac{AB}{AQ}$;	0,25
	2 $\widehat{EAO} = \widehat{BAQ} = 90^\circ \Rightarrow \Delta AEO \sim \Delta ABQ$	0,25
	$\Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{ABQ}$. Mặt khác $\widehat{HPF} = \widehat{ABQ}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) nên $\widehat{AEO} = \widehat{HPF}$. Hai góc này ở vị trí đồng vị nên $PH \parallel OE$	0,25
	P là trung điểm của EA \Rightarrow H là trung điểm của OA	0,25
	Xác định vị trí của CD để tam giác BPQ có diện tích nhỏ nhất	1,00
	Ta có $S_{\Delta BPQ} = \frac{AB \cdot PQ}{2} = R \cdot PQ = R(AP + AQ) = \frac{R}{2}(AE + AF)$	0,25
	3 $\geq \frac{R}{2} \cdot 2\sqrt{AE \cdot AF}$	0,25
	$= R \cdot \sqrt{AB^2} = R \cdot AB = 2R^2$ $S_{\Delta BPQ} = 2R^2 \Leftrightarrow AE = AF$	0,25
	$\Leftrightarrow \Delta BEF$ vuông cân tại B $\Leftrightarrow \Delta ABCD$ vuông cân tại B $\Leftrightarrow CD \perp AB$ Vậy $S_{\Delta BPQ}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $2R^2$ khi $CD \perp AB$	0,25
V	Cho 2015 số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2015}$ thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2015}}} \geq 89$. Chứng minh rằng trong 2015 số nguyên dương đó, tồn tại ít nhất 2 số bằng nhau.	1,00
	- Giả sử trong 2015 số nguyên dương đã cho không có 2 số nào bằng nhau. Không mất tính tổng quát, ta sắp xếp các số đó như sau: $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2015} \Rightarrow a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, a_3 \geq 3, \dots, a_{2015} \geq 2015$	0,25
	$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2015}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015}}$	0,25
	$= 1 + \frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{2}{2\sqrt{2015}}$	
	$< 1 + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2014} + \sqrt{2013}} + \frac{1}{\sqrt{2015} + \sqrt{2014}} \right)$	0,25

	$= 1 + 2(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{2014} - \sqrt{2013} + \sqrt{2015} - \sqrt{2014})$ $= 1 + 2(\sqrt{2015} - 1) < 89$ $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2015}}} < 89. \text{ Vô lý. Do đó trong 2015 số}$ <p>nguyên dương đã cho, luôn tồn tại ít nhất 2 số bằng nhau.</p>	0,25
--	---	------

Trần Văn Chung